Таким образом, задача поиска «золотого» стационара данной модели сводится к следующей:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{F_2(K_2^0, L_2^0)}{L_1^0+L_2^0}-\mu\to\max;\\&\frac{F_1(K_1^0, L_1^0)-\lambda_1 K_1^0-\lambda_2 K_2^0}{K_1^0+K_2^0}-u\frac{F_2(K_2^0, L_2^0)}{L_1^0+L_2^0}+\mu=0.\end{aligned}\right\}$$

Выкладки, полностью аналогичные проведенным в предыдущем пункте, показывают, что необходимыми и достаточными условиями максимума являются условия (75) и два следующих:

$$\frac{I_1^0}{I_2^0}=\left(\frac{\partial F_1}{\partial K_1}K_1^0\right):\left(\frac{\partial F_1}{\partial L_1}L_1^0\right); \tag{76}$$

$$\frac{L_1^0}{L_2^0}=\left(\frac{\partial F_2}{\partial K_2}K_2^0\right):\left(\frac{\partial F_2}{\partial L_2}L_2^0\right). \tag{77}$$

Но (76), (77) всегда выполняются в модели (III), стационар которой, таким образом, является «золотым».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рывкин А. А.* Модели роста с воспроизводимыми ресурсами. — В сб.: Проблемы эконометрического моделирования. — М.: ИМЭМО АН СССР, 1972, с. 45—73
2. *Рывкин А. А.* Устойчивость траекторий роста в моделях с воспроизводимыми ресурсами. — В сб.: Математические методы решения экономических задач сб. 6.— М.: Наука, 1974, с. 49—72
3. *Паппэ Я. Ш.* Стационарные состояния в однопродуктовых моделях экономического роста с воспроизводимыми ресурсами. — В сб.: Моделирование экономического роста. — М.: ИМЭМО АН СССР, 1975, с. 9—33
4. *Uzawa H.* On a Two-Sector Model of Economic Growth, «Reviev of Economic Studies», v. 29, № 78, pp. 40—47, 1961 October
5. *Uzawa H.* On a Two — Sector Model of Economic Growth: II, «Review of Economic Studies», v. 30, № 83, pp. 105—118, 1963 June
6. *Drandakis E. M.* Factor Substitution in the Two — Sector Growth Model, «Review of Economic Studies», v. 30, № 84, pp. 217—228, 1963 October
7. *Inada K.* Investment in Fixed Capital and the Stability of Growth Equilibrium, «Review of Economic Studies», v. 32, № 93, pp. 19—30, 1966 January
8. *Shinkai Y.* On Equilibrium Growth of Capital and Labor, «International Economic Review», v. 1, № 2, pp. 107—111, 1960 May
9. *Клименко Б. И.* Двухсекторные модели экономического роста. — В сб.: Моделирование экономического роста. — М.: ИМЭМО АН СССР, 1975, с. 35—72
10. *Клименко Б. И.* Исследование процесса воспроизводства в экономике США с помощью двухсекторных моделей. — В сб.: Комплексное прогнозирование в экономике и международных отношениях. Вып. II. — М.: ИМЭМО АН СССР, 1976, с. 139—164

А. Г. Хованский

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Теория Морса представляет собой удобный и гибкий аппарат для изучения геометрии многообразий. Идея теории заключается в следующем: на многообразии фиксируется функция с простыми особыми точками, и рассматривается область на многообразии, в которой функция не превосходит некоторого значения c. Затем значение параметра c меняется от минимума функции до ее максимума. Соответствующая область на многообразии меняется от пустого множества до всего многообразия. Резкие изменения области (перестройки ее топологии) происходят при прохождении параметра c через критические значения функции. Изучение этих перестроек дает информацию о геометрии многообразия.

В настоящей статье для изучения геометрии простого (см. § 1) выпуклого многогранника рассматривается общая линейная функция на многограннике. Этот подход вполне аналогичен подходу теории Морса. (На самом деле здесь не просто аналогия: существует многообразие, размерность которого равна удвоенной размерности многогранника, на котором линейная функция становится Морсовской, а предлагаемые рассуждения становятся обычными рассуждениями теории Морса.)

Несколько слов о результатах. В § 1 определяется индекс вершины многогранника относительно общей линейной функции. Доказывается, что число вершин заданного индекса не зависит от выбора линейной функции и является инвариантом многогранника. Показывается, что этот инвариант совпадает с одним из коэффициентов так называемого H-полинома многогранника. Найденная связь полезна в обоих направлениях. С одной стороны, мы получаем очень простое доказательство симметрии и неотрицательности коэффициентов H-полинома. С другой стороны, теория H-полиномов помогает в изучении сечений многогранников. Во втором параграфе оценивается число граней многогранника, которое может пересечь гиперплоскость. Показывается, что оценка часто неулучшаема. В третьем параграфе решаются специальные задачи дробнолинейного программирования, полезные для рассматриваемого круга вопросов. Решения этих задач, а также остальные результаты настоящей статьи применяются для оценки средней сложности граней многогранника [1].

§ 1. Индексы линейной функции в вершинах простого многогранника

Выпуклый n-мерный многогранник в R^n называется простым, если через каждую его вершину проходит ровно n граней старшей размерности. Чуть пошевелив грани старшей размерности любого многогранника, его можно превратить в простой — если конечное число гиперплоскостей в R^n находятся в общем положении, то никакой набор из $(n+1)$ гиперплоскостей не проходит через точку. Через каждую вершину простого n-мерного многогранника проходит ровно n ребер. Линейную функцию на многограннике назовем общей, если она не постоянна ни на каком ребре многогранника. Чуть изменив любую линейную функцию, ее можно превратить в общую.

Скажем, что вершина простого многогранника имеет индекс i относительно некоторой общей линейной функции L, если функция L убывает ровно на i ребрах, выходящих из этой вершины (и, следовательно, на остальных $(n-i)$ ребрах, выходящих из этой вершины, она возрастает). Обозначим через $h(i)$ число вершин многогранника, имеющих индекс i. Справедлива следующая

Теорема 1. Число $h(i)$ не зависит от выбора общей линейной функции (а определяется лишь через комбинаторику многогранника).

Ниже мы приведем два доказательства этой неожиданной теоремы. В первом из них (см. ниже теорему 2) число $h(i)$ явно выражено через числа граней многогранника различных размерностей. Замечательным обстоятельством здесь является совпадение выражения для числа $h(i)$ с i-м коэффициентом так называемого H-полинома многогранника (см. ниже определение H-полинома). Это совпадение, с одной стороны, объясняет неотрицательность коэффициентов и возвратность H-полинома (известные доказательства первого из этих фактов далеко не элементарны), а с другой стороны, позволяет использовать теорию H-полиномов в задачах о рассечении многогранника гиперплоскостью.

Второе доказательство теоремы 1 объясняет независимость чисел $h(i)$ от линейной функции без их явного вычисления. Это доказательство приводит к новым геометрическим результатам. Обозначим через F_k число k-мерных граней фиксированного простого многогранника.

F-полиномом простого многогранника называется производящий полином числе F_k, т. е. $F(t)=\Sigma F_k t^k$. H-полиномом простого многогранника называется полином $H(t)$, определенный формулой

$$H(t)=F(t-1)=\Sigma F_k(t-1)^k.$$

Коэффициенты H_k полинома $H=\Sigma H_k t^k$ образуют так называемый H-вектор многогранника $H=(H_1, \ldots, H_n)$. Известны необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на вектор, чтобы он был H-вектором некоторого простого многогранника [2]. В частности, справедливо следующее

Утверждение: 1) полином H возвратен, т. е. $H_k=H_{n-k}$ (это утверждение называется теоремой Дена-Зоммервиля);

2) коэффициенты H_k неотрицательны. Более того, справедливы следующие неравенства:

3) $1=H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_q$, где $q=[n/2]$.

Первые два пункта этого утверждения мы докажем ниже совершенно элементарными средствами.

Теорема 2. Число $h(i)$ совпадает с i-м коэффициентом H-полинома. Другими словами, числа $h(i)$ связаны с числами F_k k-мерных граней многогранника соотношениями:

1) $F_k=\sum\limits_{i \geqslant k} C_i{}^k h(i)$;

2) $h(i)=\sum\limits_{m \geqslant i} (-1)^{m-i} C_m{}^i F_m$.

Доказательство. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой k-мерной грани многогранника ту вершину, в которой линейная функция L достигает максимума на этой грани. При этом отображении в каждую вершину индекса i попадает в точности $C_i{}^k$ k-мерных граней. Действительно, в точке максимума на k-мерной грани, по k ребрам, исходящим из этой вершины и лежащим в грани, функция убывает. Наоборот, набору выходящих из одной вершины k ребер, на каждом из которых функция убывает, соответствует k-мерная грань, для которой эта вершина является максимумом — в простом многограннике на каждый набор из k ребер, исходящих из одной вершины, натягивается k-мерная грань. Просуммировав по всем вершинам число прообразов предъявленного отображения, получим формулу

$$F_k=\sum_{i \geqslant k} C_k{}^i h(i).$$

Совокупность таких формул для различных k эквивалентна тождеству $\Sigma F_k t^k=\Sigma h(i)(t+1)^i$. Заменив в этом тождестве переменную t на $t-1$, получим тождество $\Sigma F_k(t-1)^k=\Sigma h(i) t^i$, которое означает, что полином $\Sigma h(i) t^i$ совпадает с H-полиномом многогранника. Выписанное тождество эквивалентно совокупности равенств $h(i)=\Sigma(-1)^{m-i} C_m{}^i F_m$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Числа H_i и H_{n-i} равны.

Доказательство. Рассмотрим с общей функцией L функцию $-L$. Вершина индекса i для функции L имеет индекс $n-i$ для функции $-L$. Следствие доказано, так как число $h(i)$, посчитанное для функции L, совпадает с числом $h(n-i)$, посчитанным для функции $-L$.

Тем самым мы получили новое доказательство теоремы Дена-Зоммервиля о равенстве H_i и H_{n-i}.

Следствие 2. Числа H_i неотрицательны.

Действительно, число H_i совпадает с числом $h(i)$, которое по определению неотрицательно.

Отметим, что, используя минимаксные соображения, легко доказать существование вершин любого индекса от 0 до h, и тем самым доказать положительность чисел H_i [1].

Рассмотрим теперь не обязательно общую линейную функцию на простом многограннике. С каждой вершиной свяжем три числа i_-, i_0 и i_+, в сумме равные h — числу ребер, выходящих из вершины, по которым функция соответственно убывает, остается постоянной, возрастает. Для общей функции число i_- совпадает с индексом вершины.

Утверждение 1. Ребро простого многогранника, на котором линейная функция постоянна, соединяет вершины с одинаковыми наборами чисел i_-, i_0, i_+.

Доказательство. Пусть $(n-1)$-мерные грани, проходящие через ребро, соответствуют линейным неравенствам $L_1(x)\geqslant 0, \ldots, L_{n-1}(x)\geqslant 0$. Так как линейная функция L постоянна на ребре, она является линейной комбинацией функций L_i, т. е. $L=\Sigma a_i L_i$. Пусть одной из вершин многогранника на ребре соответствует неравенство $G_1(x)\geqslant 0$, а другой — неравенство $G_2(x)\geqslant 0$.

Ребру, выходящему из первой вершины и определенному соотношением $G_1(x)=0$, $L_1(x)=0, \ldots, \hat{L}_i(x)=0, \ldots, L_{n-1}(x)=0$, сопоставим ребро, выходящее из второй вершины и определенное соотношениями $G_2(x)=0$, $L_1(x)=0, \ldots, \hat{L}_i(x)=0, \ldots, L_{n-1}(x)=0$ (значек $\hat{}$ над равенством означает, что это равенство опущено). Функция L на соответствующих ребрах будет одновременно возрастать, убывать или оставаться постоянной (соответственно, если $a_i>0$, $a_i<0$ и $a_i=0$).

Утверждение 2. Каждая компонента связности объединения всех граней, целиком лежащих на одной поверхности уровня линейной функции на простом многограннике, состоит из изолированных граней.

Доказательство. Пусть две грани пересекаются по грани меньшей размерности и лежат в поверхности уровня. Тогда содержащая их грань большей размерности (которая существует в силу простоты многогранника) тоже лежит в поверхности уровня.

Следствие 1. Справедливо утверждение теоремы 1.

Доказательство. Непрерывно изменяя линейную функцию, можно от одной общей функции дойти до любой другой, проходя по пути только через простейшие необщие функции — через функции, которые могут быть постоянны на отдельных (непересекающихся) ребрах. Как видно из утверждения 1, при прохождении через это вырождение вершины, соединенные описанными ребрами, могут лишь обменяться индексами.

Следствие 2. Все вершины, лежащие в одной максимальной грани на поверхности уровня, имеют одинаковые числа (i_-, i_0, i_+). Число i_0 равно размерности этой грани.

Определение. Индексом $\mathrm{ind}(\Gamma)$ максимальной грани Γ в поверхности уровня линейной функции назовем число i_- для любой из ее вершин.

Теорема 3. Для любой линейной функции на простом многограннике Δ справедливо тождество

$$H[\Delta]=\Sigma \mathrm{ind}(\Gamma)+H[\Gamma],$$

в котором суммирование ведется по всем максимальным граням уровня Γ, а $H[\Gamma]$, $H[\Delta]$ — H-полиномы граней и многогранника.

Доказательство. Чуть изменим коэффициенты линейной функции и приведем ее в общее положение. Ограничение пошевеленной функции на грань Γ будет иметь $H_i[\Gamma]$ вершин индекса i. Индекс этих же вершин во всем многограннике будет больше на $\mathrm{ind}(\Gamma)$. Теорема 3 теперь вытекает из теоремы 2.

§ 2. Гиперплоское сечение многогранника

Цель этого параграфа — оценка снизу числа k-мерных граней простого многогранника, которые останутся непересеченными гиперплоскими сечением, не проходящим через вершины многогранника.

Чуть пошевелив гиперплоскость, можно добиться, чтобы она стала поверхностью уровня общей линейной функции L на многограннике. Итак, пусть секущая гиперплоскость задается уравнением $L=c$. Обозначим через $O(c)$ и $\Pi(c)$ множество вершин многогранника, в которых значение функции соответственно меньше, чем c, и больше, чем c. Объединение непересекающих множеств $O(c)$ и $\Pi(c)$ совпадает с множеством вершин многогранника, так как гиперплоскость $L=c$ по условию не проходит через вершины.

Теорема 4. Число $F_k(c)$ k-мерных граней в простом n-мерном многограннике, не пересекающихся с гиперплоскостью $L=c$, определяется формулой

$$F_k(c)=\sum_{b\in O(c)} C^k_{\mathrm{Ind}(b)}+\sum_{b\in\Pi(c)} C^k_{n-\mathrm{Ind}(b)}.$$

Доказательство. Множество k-мерных граней, не пересекающих с гиперплоскостью $L=c$, распадается на два подмножества: подмножества k-мерных граней, на которых функция L соответственно строго меньше, чем c, и подмножество k-мерных граней, на которых она строго больше, чем c. Число граней в первом множестве равно $\sum_{b\in O(c)} C^k_{\mathrm{ind}(b)}$. Для доказательства нужно сопоставить каждой грани из этого множества вершину, в которой функция L достигает максимума, и посчитать, скольким граням соответствует одна вершина. (Аналогичное вычисление проведено при доказательстве теоремы 2.) Сопоставляя грани из второго множества точку минимума, убеждаемся, что число граней во втором множестве равно $\sum_{b\in\Pi(c)} C^k_{n-\mathrm{Ind}(b)}$. Теорема доказана.

Теорема 5. В условиях теоремы 4 справедлива следующая оценка снизу:

$$F_k(c)\geqslant 2\sum_{i<[n/2]} C_i{}^k H_i+Q,$$

где Q равно 0 при нечетном n и равно $C^k_{n/2}H_{n/2}$ при четном n.

Доказательство. Теорема 5 является прямым следствием теоремы 4 и симметрии $H_i=H_{n-i}$ чисел H (см. следствие 1 из § 1).

Напомним, что числа H_i выражаются через числа граней различных размерностей у многогранника.

Оценка теоремы 5 часто точна (т. е. не может быть улучшена в классе многогранников, имеющих заданное число граней каждой размерности). Приведем критерий, позволяющий доказывать точность оценки, и предлагающий другое выражение для нее.

Скажем, что простой n-мерный многогранник удачно рассечен гиперплоскостью $L=c$, если для каждого k число $F_k(c)$ удовлетворяет соотношению $F_k(c)=2\sum_{i<[n/2]} C_i{}^k H_i+Q$, где Q то же, что и в теореме 5.

Теорема 6 (критерий удачного рассечения). Гиперплоскость, не параллельная ребрам и не проходящая через вершины простого многогранника, удачно его рассекает, если и только если выполнено условие 1), а также если и только если выполнено условие 2):

1) из каждой вершины многогранника к секущей гиперплоскости идет не меньше ребер, чем от нее;

2) гиперплоскость пересекает все грани, размерность которых больше половины размерности многогранника.

Доказательство. Первый критерий непосредственно вытекает из доказательства теоремы 5: при оценке не происходит огрубления, если и только если все вершины, у которых индекс $<n/2$, лежат ниже гиперплоскости, а у которых индекс $>n/2$ — выше. Второй критерий выводится из первого: если некоторая грань размерности $>n/2$ лежит по одну сторону от гиперплоскости, то из ближайшей к гиперплоскости вершины этой грани больше идет ребер от гиперплоскости, чем к ней.

Пример 1. Всякая прямая на плоскости, пересекающая выпуклый n-угольник и не проходящая через его вершины, удачно рассекает этот n-угольник. Это сразу вытекает из второго критерия. В этом примере $H_0=H_2=1$, $H_1=n-2$. Теорема 5 утверждает, что число непересеченных ребер $\geqslant n-2$. (Разумеется, в этом случае теорема очевидна).

Пример 2. Пересечем n-мерный симплекс гиперплоскостью так, чтобы с одной стороны от нее лежало ровно $[(n+1)/2]$ вершин. Это удачное рассечение (доказательство немедленно вытекает из второго критерия). В этом примере $H_0=\ldots=H_n=1$. Нижняя оценка числа $F_k(c)$ для четного n суть $C_{n/2}^{k+1}+C_{(n+2)/2}^{k+1}$, для нечетного n — суть $2C_{(n+1)/2}^{k+1}$. Теорема 5 дает ту же оценку. Непосредственная проверка этого опирается на тождество $\sum\limits_{i<m} C_i^k=C_{m+1}^{k+1}$.

Пример 3. Рассмотрим в трехмерном пространстве призму, в основании которой лежит выпуклый n-угольник. Наклоняя среднее сечение призмы, можно добиться, чтобы оно пересекало верхнее и нижнее основания, и, по-прежнему, пересекало бы все боковые грани. При этом мы получим удачное сечение. Тетраэдр и призмы с n-угольным основанием доставляют примеры трехмерных простых многогранников со всеми возможными H-полиномами. (Действительно, пусть B, P, Γ — соответственно числа вершин, ребер и граней простого многогранника. Согласно формуле Эйлера $B-P+\Gamma=2$. Из-за простоты $2P=3B$. Из последнего соотношения следует, что P делится на 3. Обозначим $P/3$ через n. При $n=2$ многогранник—симплекс. При $n\geqslant 3$ многогранник имеет тот же H-полином, что и призма с n-угольным основанием.) Числа H_i определяются соотношениями $H_0=H_3=1$, $H_1=H_2=n-1$. Оценка теоремы 5 показывает, что число пересеченных ребер простого трехмерного многогранника не превосходит $2+P/3$. Из примера видно, что это оценка точная.

Пример 4. Рассмотрим в R^n стандартный куб, определенный соотношениями $0\leqslant x_1\leqslant 1,\ldots,\ 0\leqslant x_n\leqslant 1$. Тогда гиперплоскость, определенная уравнением $x_1+\ldots+x_n=c$, где c при нечетном n равно $n/2$, а при четном n равно $(n+1)/2$, удачно рассекает куб. Это вытекает из второго критерия удачного рассечения. Тем самым мы доказали точность оценки числа $F_k(c)$ для любого многогранника, аналогичного n-мерному кубу. Заодно мы получаем более удобное выражение для этой оценки. Посчитаем сколько k-мерных граней стандартного куба пересекает указанное сечение. Грань куба размерности k задается фиксацией для некоторых $n-k$ координат значений 0 или 1 (а остальные координаты на этой грани пробегают все значения от 0 до 1). Чтобы грань пересекала сечение, необходимо и достаточно, чтобы среди фиксированных координат было бы m единиц, где $[n/2]\geqslant m>[n/2]-k$. Отсюда имеем, что число $P_{k,n}$ пересеченных k-мерных граней определяется формулой

$$P_{k,n}=C_n^k\sum_{[n/2]\geqslant m>[n/2]-k} C_{n-k}^m.$$

Число $P_{k,n}$ дает точную верхнюю оценку числа пересеченных k-мерных граней в многограннике, аналогичном n-мерному кубу. Обозначим через $P_{k,n}^*$ относительную долю пересеченных граней, т. е. $P_{k,n}^*=P_{k,n}/C_n^k 2^{n-k}$. Асимптотика числа $P_{k,n}^*$ при больших n определяется биномиальным распределением. Какая доля k-мерных граней при $k\sim c\sqrt{n}$ в многограннике, аналогичном n-мерному кубу, может быть пересечена гиперплоскостью? Ответ: при больших n наибольшая величина этой доли имеет порядок $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot\int\limits_{-c}^{c}\exp(-x^2)\,dx$.

§ 3. Дробнолинейное программирование

Дробнолинейное программирование — это максимизация на выпуклом многограннике отношения двух линейных функций L_1/L_2 (предполагается, что знаменатель L_2 не обращается в ноль на многограннике). Максимум дробнолинейной функции достигается на некоторой грани многогранника. В случае общего положения эта грань является нольмерной и представляет собой одну из вершин многогранника. Вообще дробнолинейное программирование мало отличается от линейного. Проективным преобразованием, переводящим гиперплоскость $L_2=0$ в бесконечно удаленную, дробнолинейную функцию L_1/L_2 можно превратить в линейную. Выпуклый многогранник, не пересекающий гиперплоскость $L_2=0$, при таком проективном преобразовании перейдет в другой выпуклый многогранник, а задача дробнолинейного программирования перейдет в задачу линейного программирования.

Впрочем, сходство этих двух задач можно увидеть и не производя проективного преобразования. Очевидно следующее

Утверждение. Дробнолинейная функция $(ax+b)/(cx+d)$ одного переменного x на любом отрезке непрерывности либо строго монотонна, либо постоянна.

На аналогичном свойстве линейной функции и основано линейное программирование.

Следствие 1. Пусть $B_1>0$, $B_2>0$ и $A_1/B_1\geqslant A_2/B_2$. Тогда $A_1/B_1\geqslant(A_1+A_2)/(B_1+B_2)\geqslant A_2/B_2$, причем все неравенства превращаются в равенство одновременно.

Доказательство немедленно вытекает из рассмотрения на отрезке $[0, 1]$ дробнолинейной функции $[(1-x)A_1+xA_2]/[(1-x)B_1+xB_2]$. Число $(A_1+A_2)/(B_1+B_2)$ суть значения этой функции при $x=1/2$.

Следствие 2. Пусть $B_1>0, \ldots, B_k>0$, $A_1/B_1>\ldots>A_k/B_k$, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ неотрицательны и $\alpha_j>0$. При $m\geqslant j$ положим $Q_m=\sum\limits_{i\leqslant m}\alpha_iA_i\Big/\sum\limits_{i\leqslant m}\alpha_iB_i$. Тогда $A_1/B_1\geqslant Q_j\geqslant Q_{j+1}\geqslant\ldots\geqslant Q_k\geqslant A_k/B_k$, причем $Q_m=Q_{m+1}$, только если $\alpha_{m+1}=0$, а $A_1/B_1=Q_j$, только если $j=1$.

Для доказательства достаточно несколько раз воспользоваться следствием 1.

В исследовании сечений многогранников гиперплоскостями полезны решения трех специальных задач дробнолинейного программирования. Сформулируем и решим эти задачи.

Пусть B — конечное множество точек с фиксированной целочисленной функцией $i:B\to Z$, принимающей значения от нуля до n. Рассмотрим пространство $R^{|B|}$, координатные функции которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с точками множества B. Координатную функцию на $R^{|B|}$ соответствующую точке b, обозначим через x_b. Для неотрицательных целых чисел l и k определим функцию $\Phi_{l,k}$ на $R^{|B|}$ формулой

$$\Phi_{l,k}=\frac{\sum\limits_{b\in B}x_bC^l_{i(b)}+(1-x_b)\,C^l_{n-i(b)}}{\sum\limits_{b\in B}x_bC^k_{i(b)}+(1-x_b)\,C^k_{n-i(b)}}.$$

Функция $\Phi_{l,k}$ определена, если существует хотя бы одна точка $b\in B$, для которой $k\leqslant\min(i(b), n-i(b))$. Мы всегда будем предполагать это условие выполненным.

Задача 1. Найти максимум функции $\Phi_{l,k}$ на стандартном кубе $0\leqslant x_b\leqslant1$ пространства $R^{|B|}$.

Обозначим через q число $[n/2]$ и через a вершину стандартного куба, определенную условиями: $x_b(a)=1$, если $i(b)\leqslant q$ и $x_b(a)=0$, если $i(b)>q$.

Теорема 7. При $q \geqslant k > l$ максимум функции $\Phi_{l,k}$ на стандартном кубе пространства $R^{|B|}$ достигается в вершине a.

Доказательство теоремы использует следующие два свойства биномиальных коэффициентов.

Утверждение. 1. Пусть $l < k$. Тогда отношение $\psi(m) = C_m{}^l / C_m{}^k$ (определенное при $m \geqslant k$) с ростом m строго монотонно убывает. 2. Пусть $A > Q \geqslant B$. Тогда отношение $\varphi(h) = (C_A^h - C_B^h)/C_Q^h$ (определенное при $0 \leqslant h \leqslant Q$) с ростом h строго монотонно возрастает.

Доказательство утверждения. 1. $\psi(m) = k!/(m-l) \cdot (m-l-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) \cdot l!$. С ростом m знаменатель возрастает. 2. $\varphi(h) = A!/ /Q!(A-h) \cdot \ldots (Q-h+1) - B!(Q-h) \cdot \ldots (B-h+1)/Q!$ Произведения $(A-h) \cdot \ldots \cdot (Q-h+1)$ и $(Q-h) \cdot \ldots (B-h+1)$ содержат не зависящее от h число сомножителей, которые уменьшаются с ростом h.

Переходим к доказательству теоремы, которое мы осуществим в три шага.

Шаг 1. Значение функции $\Phi_{l,k}$ в вершине a не меньше, чем $C_q{}^l / C_q{}^k$. Действительно, согласно первой части утверждения отношения $C_k{}^l / C_k{}^k$, $C_{k+1}^l / C_{k+1}^k, \ldots C_q{}^l / C_q{}^k$ убывают. Для завершения 1-го шага теперь достаточно воспользоваться следствием 2.

Шаг 2. Значение функции $\Phi_{l,k}$ в вершине a не меньше, чем в любой соседней вершине (т. е. чем в любой вершине, соединенной с вершиной a ребром). Действительно, соседняя вершина имеет такие же координаты, как и вершина a, за исключением одной. Пусть эта исключительная координата соответствует точке $b \in B$. Значение $i(b)$ функций в этой точке b обозначим просто через i. Возможно три случая: $i < q$. $i = q$ и $i > q$, В первом из этих случаев при переходе к соседней вершине к числителю функции $\Phi_{l,k}$ прибавляется число $C_{n-i}^l - C_i{}^l$, а к знаменателю — число $C_{n-i}^k - C_i{}^k$. Покажем, что отношение этих чисел меньше, чем $\Phi_{l,k}(a)$ (согласно следствию 1 этого достаточно для выполнения шага 2 в рассматриваемом случае). По шагу 1 $\Phi_{l,k}(a) \geqslant C_q{}^l / C_q{}^k$. Далее $(C_{n-i}^l - C_i{}^l)/(C_{n-i}^k - C_i{}^k) \leqslant C_q{}^l / C_q{}^k$. Действительно, рассматриваемое неравенство эквивалентно соотношению $(C_{n-i}^l - C_i{}^l)/C_q{}^l \leqslant (C_{n-i}^k - C_i{}^k)/C_q{}^k$. Справедливость этого соотношения вытекает из второй части утверждения для $A = n - i$, $Q = q$, $B = i$, $(i < [n/2]$, $n - i > [n/2]$, $q = [n/2])$ и значений h, равных l и k. Во втором случае $(i = q)$ переходит к новой вершине, не меняет функции $\Phi_{l,k}$. Третий случай разбирается аналогично первому (к числителю добавляется число $C_i{}^l - C_{n-i}^l$, к знаменателю — число $C_i{}^k - C_{n-i}^k$. Учитывая соотношение $i > q = [n/2]$ и воспользовавшись переобозначением $j = n - i$, мы приходим к старой ситуации).

Шаг 3. Функция $\Phi_{l,k}$ достигает максимума в вершине a. Действительно, мы проверили, что в соседних вершинах функция не больше, чем в вершине a. Согласно теории линейного программирования локальный максимум на выпуклом многограннике линейной (а значит и дробнолинейной) функции является глобальным максимумом. (Это утверждение более известно для строгого локального максимума. Случай не строго локального максимума сводится к случаю строго добавлением малой линейной функции со строгим максимумом в рассматриваемой вершине). Теорема доказана.

Переходим ко второй задаче дробнолинейного программирования.

Для каждого целого i, $0 \leqslant i \leqslant n$ положим $i^* = \min(i, n-i)$, по-прежнему число $[n/2]$ обозначим через q. Для целых l и m, не превосходящих q, определим число $M(l, m) = \sum_{m \leqslant i \leqslant n-m} C_{i^*}^l$. Рассмотрим в пространстве R^{q+1} с координатами $p_0, p_1, \ldots, p_q$, функцию

$$O_{l,k,n} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} p_j M(l, j) \Big/ \sum_{0 \leqslant j \leqslant q} p_j M(k, j).$$

Теорема 8. Максимум функции$O_{l,k,n}$ при $l<k\leqslant q$ на части положительного октанта R^{q+1}, выделенной условием $p_0>0$, достигается на множестве $p_0>0$, $p_l=\ldots=p_q=0$.

Доказательство. Шаг 1. Отношения $M(l, j)/M(k, j)$ с ростом j от 0 до q монотонно убывают. Действительно, отношения C_m^l/C_m^k с увеличением m от k до q монотонно убывают. (утверждение 1, пункт 1). Следовательно, при $j\geqslant k$ $M(l, j)/M(k, j)\leqslant C_j^l/C_j^k$ При уменьшении j на один к числителю добавится C_{j-1}^l, а к знаменателю C_{j-1}^k, отношение которых больше, чем $C_j^l/C_j^k\geqslant M(l, j)/M(k, j)$. Поэтому, при $j>k$ при уменьшении j отношение $M(l, j)/M(k, j)$ будет увеличиваться. При дальнейшем уменьшении j до l оно будет продолжать увеличиваться — будет лишь расти знаменатель.

Шаг 2. Для завершения доказательства нужно воспользоваться результатом шага 1 и следствием 2.

Переходим к третьей задаче дробнолинейного программирования. Эта задача похожа на вторую, и мы воспользуемся уже введенными обозначениями. Кроме, того для $0<k\leqslant q$ и $0\leqslant j\leqslant q$ положим $N(k, j)= = \sum\limits_{j\leqslant i\leqslant n-j} C_i^k=C_{n+1-j}^{k+1}-C_{j+1}^{k+1}$ (при $k>j$ вычитаемое суть 0). Рассмотрим на R^{q+1} функцию

$$D_{k,n}=\sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_jN(k, j)\Big/\sum_{0\leqslant j\leqslant q} p_jM(k, j).$$

Теорема 9. Максимум функции $D_{k,n}$ на части положительного октанта в R^{q+1}, выделенной условием $p_0>0$, достигается на множестве, $p_0>0$, $p_1=\ldots p_q=0$.

Доказательство. Шаг 1. Отношение $N(k, j)/M(k, j)$ с уменьшением j от q до k монотонно возрастает. Действительно, при переходе от $j+1$ к j к числителю прибавляется величина $C_{n-j}^k+C_j^k$, а к знаменателю — величина $2C_j^k$. Отношение этих величин равно $\frac{1}{2}(1+C_{n-j}^k/C_j^k)$. Эти отношения растут с уменьшением j. Каждое из них больше, чем $N(k, q)/M(k, q)$. Отсюда и вытекает шаг 1.

Шаг 2. Отношение $N(k, j)/M(k, j)$ с уменьшением j от k до 0 монотонно возрастает — растет лишь числитель. Для завершения доказательства нужно соединить этот факт с результатом следствия 2 и шага 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хованский А. Г.* Линейное программирование и обобщение теоремы Никулина. — Настоящий сборник
2. *Stanley R.* The number of faces of a simplicial convexes. — Advances in Math. 35, 236—238 (1980)

А. Г. Хованский

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НИКУЛИНА

Эта статья является непосредственным продолжением предыдущей и использует введенные в ней определения и обозначения. В статье оценивается доля k-мерных граней простого многогранника, которые пересекаются с его гиперплоским сечением. Оценка применяется для обобщения теоремы Никулина о средней сложности граней многомерно-